**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ТУЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Институт горного дела и строительства

Кафедра «Охрана труда и окружающей среды»

# *МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ*

# *К КОНТРОЛЬНО-РАСЧЕТНОМУ ЗАДАНИЮ*

по дисциплине
«Математическое моделирование техногенного воздействия
на техносферу и окружающую среду»

Уровень профессионального образования: *(высшее образование – магистратура)*
Направление *(специальность)* подготовки: *20.04.01 Техносферная безопасность*
Программа подготовки: Производственная безопасность
Промышленная экология и рациональное использование природных ресурсов

Квалификация выпускника: *магистр*

Форма обучения: очно-заочная

Тула 2018 г.

Методические указания к контрольно-расчетному заданию учебной дисциплины *(модуля)* «Математическое моделирование техногенного воздействия на техносферу и окружающую среду» разработаны профессором Л.Э. Шейнкманом и обсуждены на заседании кафедры *«Охрана труда и окружающей среды»* Института горного дела и строительства (протокол заседания кафедры №__1__ от «__30__» __августа______ 2018 г.).

## Введение

Линейное программирование (ЛП)— это метод математического моделирования, разработанный для *оптимизации* использования *ограниченных* ресурсов. ЛП успешно применяется в военной области, индустрии, сельском хозяйстве, транспортной отрасли, экономике, экологии, системе здравохранения и даже в социальных науках. Широкое использование этого метода также подкрепляется высокоэффективными компьютерными алгоритмами, реализующими данный метод. На алгоритмах линейного программирования (учитывая их компьютерную эффективность) базируются оптимизационные алгоритмы для других, более сложных типов моделей и задач исследования операций (ИО), включая целочисленное, нелинейное и стохастическое программирование.

Вычисления в методе ЛП, как и во многих задачах ИО, как правило, очень трудоемкие и поэтому требуют применения вычислительной техники.

## 1. Ограничения в модели линейного программирования

В этом разделе на примере с двумя переменными показаны основные элементы модели ЛП.

**Пример 1.**

Предприятие по производству красок производит краску для внутренних и наружных работ из сырья двух типов: Ml и М2. В таблице 1 приведены основные данные для задачи.

Таблица 1

| | расход сырья (в тоннах на тонну) для производства краски для наружных работ | расход сырья (в тоннах на тонну) для производства краски для внутренних работ | максимально возможный ежедневный расход сырья | примечание |
|---|---|---|---|---|
| сырье М1<br>сырье М2 | 6<br>1 | 4<br>2 | 24<br>6 | |
| доход (в тыс.руб.) на тонну краски | 5 | 4 | | |

Отдел сбыта предприятия ограничил ежедневное производство краски для внутренних работ до 2 т (из-за отсутствия надлежащего спроса), а также поставил условие, чтобы ежедневное производство краски для внутренних работ не превышало более чем на тонну аналогичный показатель производства краски для внешних работ. Предприятие хочет определить оптимальное (наилучшее) соотношение между видами выпускаемой продукции для максимизации общего ежедневного дохода.

Задача (модель) линейного программирования включает три основных элемента.

1. Переменные, которые следует определить.
2. Целевая функция, подлежащая оптимизации.
3. Ограничения, которым должны удовлетворять переменные.

Определение переменных — первый шаг в создании модели. После определения переменных построение ограничений и целевой функции обычно не вызывает трудностей.

В нашем примере необходимо определить ежедневные объемы производства краски для внутренних и наружных работ. Обозначим эти объемы как переменные модели:

$x_1$ — ежедневный объем производства краски для наружных работ;

$x_2$ — ежедневный объем производства краски для внутренних работ.

Используя эти переменные, далее строим целевую функцию. Логично предположить, что целевая функция, как суммарный ежедневный доход, должна возрастать при увеличении ежедневных объемов производства красок. Обозначим эту функцию через $z$ (она измеряется в тысячах рублей) и положим, что

$$z = 5x_1 + 4x_2.$$

В соответствии с целями предприятия получаем задачу:

$$\text{максимизировать } z = 5x_1 + 4x_2.$$

Итак, остался не определенным последний элемент модели — условия (ограничения), которые должны учитывать ограниченные возможности ежедневного потребления сырья и ограниченность спроса на готовую продукцию. Другими словами, ограничения на сырье можно записать следующим образом.

Из таблицы с данными имеем следующее.

$$\text{Используемый объем сырья Ml} = 6x_1 + 4x_2$$
$$\text{Используемый объем сырья M2} = x_1 + 2x_2$$

Так как ежедневный расход сырья Ml и M2 ограничен, соответственно, 24 и 6 тоннами, получаем следующие ограничения:

$$6x_1 + 4x_2 \le 24 \text{ (сырье Ml)}$$
$$x_1 + 2x_2 \le 6 \quad \text{(сырье M2)}$$

Существуют еще два ограничения по спросу на готовую продукцию: (1) максимальный ежедневный объем производства краски для внутренних работ не должен превышать 2 т и (2) ежедневный объем производства краски для внутренних работ не должен превышать ежедневный объем производства краски для наружных работ более чем на одну тонну. Первое ограничение простое и записывается как $x_2 \le 2$. Второе можно сформулировать так: разность между ежедневными объемами производства красок для внутренних и наружных работ не должна превышать одной тонны, т.е. $x_2 - x_1 \le 1$.

Еще одно неявное ограничение состоит в том, что переменные *xi* и $x_2$ должны быть неотрицательными. Таким образом, к сформулированным выше ограничениям необходимо добавить условие неотрицательности переменных: $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

Окончательно задача будет записана следующим образом:

$$\text{максимизировать } z = 5x_1 + 4x_2$$

при выполнении ограничений

$$6x_1 + 4x_2 \le 24,$$
$$x_1 + 2x_2 \le 6,$$
$$-x_1 + x_2 \le 1,$$
$$x_2 \le 2,$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Любое решение, удовлетворяющее ограничениям модели, является допустимым. Например, решение $x_1 = 3$ и $x_2 = 1$ будет допустимым, так как не нарушает ни одного ограничения, включая условие неотрицательности. Чтобы удостовериться в этом, подставьте значения $x_1 = 3$ и $x_2 = 1$ в левые части неравенств системы ограничений и убедимся, что ни одно неравенство не нарушается. Значение целевой функции при этом решении будет равно $z = 5\times3 + 4\times1 = 19$ (тысяч рублей).

Итак, задача сформулирована, теперь встает вопрос о нахождении оптимального допустимого решения, доставляющего максимум целевой функции. После некоторых раздумий приходим к выводу, что задача имеет много (фактически, бесконечно много) допустимых решений. По этой причине невозможна подстановка значений переменных для поиска оптимума, т.е. нельзя применить простой перебор всех допустимых решений. Следовательно, необходима эффективная процедура отбора допустимых решений для поиска оптимального. В следующем разделе показан графический метод нахождения оптимального допустимого решения.

## 2. Графическое решение задачи линейного программирования

В этом разделе будет показано, как в задаче ЛП с двумя переменными можно получить решение графическим способом. Хотя такая задача редко встречается на практике (типовая задача ЛП обычно содержит тысячи переменных), идеи, вытекающие из графического способа нахождения оптимального решения, положены в основу построения общего метода решения задачи ЛП (называемого симплекс-методом).

Графический способ решения задачи ЛП состоит из двух этапов.

1. Построение пространства допустимых решений, удовлетворяющих всем ограничениям модели.
2. Нахождение оптимального решения среди всех точек пространства допустимых решений.

*Этап 1. Построение пространства допустимых решений.*

Сначала проведем оси: на горизонтальной будут указываться значения переменной $x_1$, а на вертикальной — $x_2$ (рис. 2.1).

Далее рассмотрим условие неотрицательности переменных: $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Эти два ограничения показывают, что пространство допустимых решений будет лежать в первом квадранте (т.е. выше оси $x_1$ и правее оси $x_2$).

Чтобы учесть оставшиеся ограничения, проще всего заменить неравенства на равенства, в результате чего получим уравнения прямых, а затем на плоскости провести эти прямые. Например, неравенство $6x_1 + 4x_2 \leq 24$ заменяется уравнением прямой $6x_1 + 4x_2 = 24$. Чтобы провести эту линию, надо найти две различные точки, лежащие на этой прямой. Можно положить $x_1 = 0$, тогда $x_2 = 24/4 = 6$. Аналогично для $x_2 = 0$ находим $x_1 = 24/6 = 4$. Итак, наша прямая проходит через две точки (0, 6) и (4, 0). Эта прямая обозначена на рис. 2.1 как линия (1).

Теперь рассмотрим, как графически интерпретируются неравенства. Каждое неравенство делит плоскость $(x\backslash, x_2)$ на два полупространства, которые располагаются по обе стороны прямой, которая, как показано выше, соответствует данному неравенству. Точки плоскости, расположенные по одну сторону прямой, удовлетворяют неравенству (допустимое полупространство), а точки, лежащие по другую сторону, — нет. "Тестовой" точкой, проверяющей, точки какого полупространства удовлетворяют неравенству, а какого— нет, может служить точка (0, 0). Например, эта точка удовлетворяет первому неравенству $6x_1 + 4x_2 \leq 24$ (здесь $6\times0 + 4\times0 = 0<24$). Это означает, что точки полупространства, содержащего начальную точку (0, 0), удовлетворяют этому неравенству. На рис. 2.1 допустимые полупространства показаны стрелочками.

В том случае, когда точка (0, 0) не удовлетворяет неравенству, допустимым полупространством будет то, которое не содержит эту точку. Если же прямая проходит через эту точку, следует в качестве "тестовой" взять какую-либо другую точку.

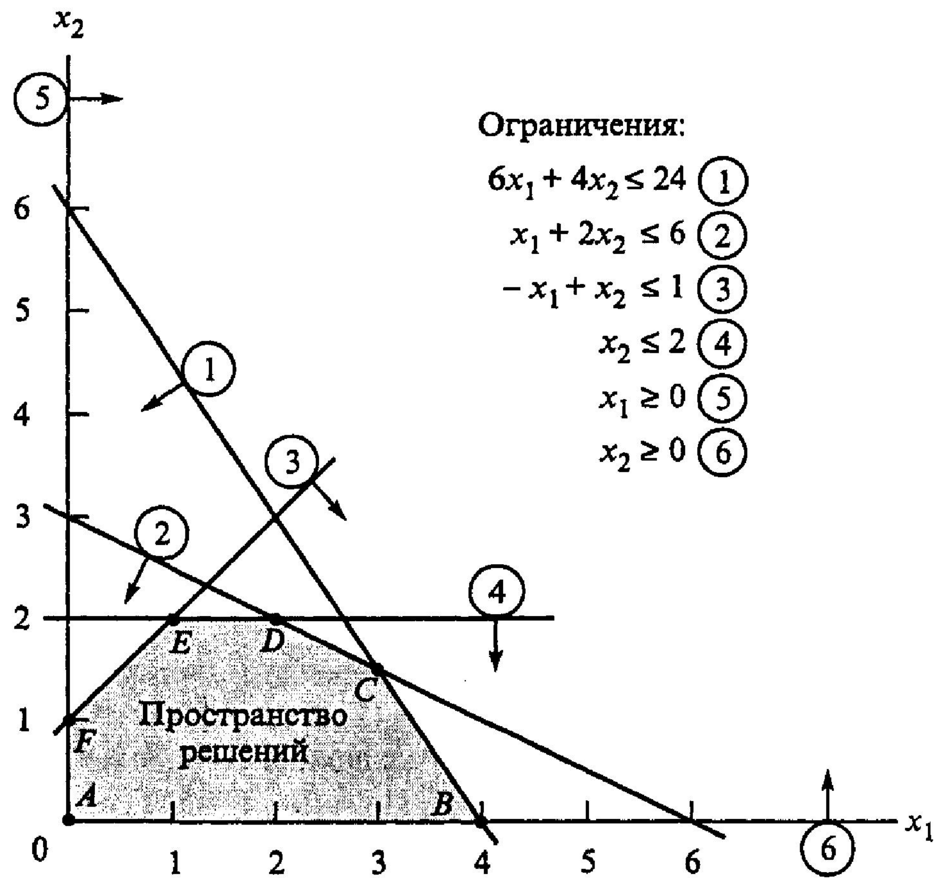


*Рис. 2.1*

*Этап* 2. *Нахождение оптимального решения.*

Точки пространства допустимых решений, показанного на рис. 2.1, удовлетворяют одновременно всем ограничениям. Это пространство ограничено отрезками прямых, которые соединяются в угловых точках *A, B,* С, Д, *E* и *F.* Любая точка, расположенная внутри или на границе области, ограниченной ломаной *ABCDEF,* является допустимым решением, т.е. удовлетворяет всем ограничениям. Поскольку пространство допустимых решений содержит бесконечное число точек, необходима некая процедура поиска оптимального решения.

Нахождение оптимального решения требует определения направления возрастания целевой функции $z = 5x_1 + 4x_2$ (напомним, что мы *максимизируем* функцию $z$). Мы можем приравнять $z$ к нескольким возрастающим значениям, например 10 и 15. Эти значения, подставленные вместо $z$ в выражение целевой функции, порождают уравнения прямых; для значений 10 и 15 получаем уравнения прямых $5x_1 + 4x_2 = 10$ и $5x_1 + 4x_2 = 15$. На рис. 2.2 эти прямые показаны штриховыми линиями, а направление возрастания целевой функции — толстой стрелкой. Целевая функция может возрастать до тех пор, пока прямые, соответствующие возрастающим значениям этой функции, пересекают область допустимых решений. Точка пересечения области допустимых решений и прямой, соответствующей максимально возможному значению целевой функции, и будет точкой оптимума.

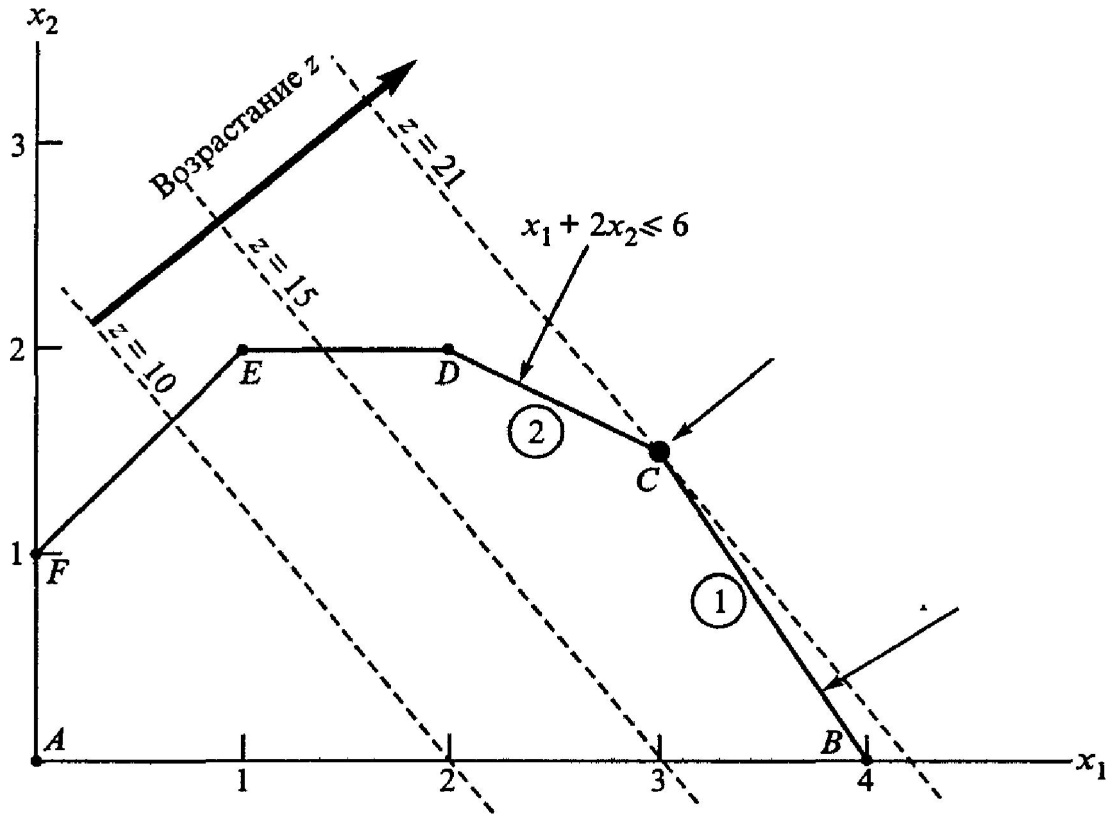


*Рис. 2.2*

На рис. 2.2 видно, что оптимальное решение соответствует точке *C*. Эта точка является местом пересечения прямых (1) и (2), поэтому ее координаты $x_1$ и $x_2$ находятся как решение системы уравнений, задающих эти прямые:

$$6x_1 + 4x_2 = 24,$$
$$x_1 + 2x_2 = 6.$$

Решением этой системы будет $x_1 = 3$ и $x_2 = 1.5$, при этом значение целевой функции равно $z = 5 \times 3 + 4 \times 1.5 = 21$. Полученное решение означает, что для предприятия оптимальным выбором будет ежедневное производство 3 т краски для наружных работ и 1.5 т— для внутренних работ с ежедневным доходом в 21 000 рублей.

Не случайно, что оптимальное решение расположено в угловой точке пространства допустимых решений, где пересекаются две прямые. Если мы изменим наклон функции z (путем изменения ее коэффициентов), то обнаружим, что в любом случае решение достигается в одной из угловых точек (или одновременно в нескольких угловых точках). В этом и состоит основная идея построения общего *симплексного алгоритма.*

**Пример 2.**

Фармацевтическая фирма ежедневно производит не менее 800 фунтов пищевой добавки, которая состоит из смеси кукурузной и соевой муки, состав которой представлен в таблице 2.

Таблица 2

| | белок | клетчатка | стоимость |
|---|---|---|---|
| мука | (в фунтах на фунт) | | (в $ за фунт) |
| кукурузная | 0.09 | 0.02 | 0.30 |
| соевая | 0.60 | 0.06 | 0.90 |

Диетологи требуют, чтобы в пищевой добавке было не менее 30% белка и не более 5% клетчатки. Фирма хочет определить рецептуру смеси наименьшей стоимости с учетом требований диетологов.

Поскольку пищевая добавка состоит только из кукурузной и соевой муки, переменными для этой задачи, очевидно, будут

$x_1$ — количество (в фунтах) кукурузной муки, используемой в дневном производстве пищевой добавки;

$x_2$ — количество (в фунтах) соевой муки, используемой в дневном производстве пищевой добавки.

Целевая функция равна общей стоимости пищевой добавки, производимой за один день, и должна быть минимальной. В данном случае это можно записать следующим образом:

$$\text{минимизировать } z = 0.3\,x_1 + 0.9\,x_2.$$

Ограничения модели должны отражать производственные требования и рекомендации диетологов. Фирма должна выпускать не менее 800 фунтов смеси в день; соответствующее ограничение будет записано следующим образом:

$$x_1 + x_2 \geq 800.$$

Рассмотрим ограничение, связанное с количеством белка в пищевой добавке. Общее количество белка в смеси, состоящей из $x_x$ фунтов кукурузной муки и $x_2$ фунтов соевой муки, равно $0.09\,x_1 + 0.6\,x_2$ (фунтов). Это количество должно составлять не менее 30% от общего объема смеси $x_1 + x_2$. Отсюда получаем следующее неравенство

$$0.09\,x_1 + 0.6\,x_2 \geq 0.3(x_1 + x_2).$$

Аналогично строится ограничение для клетчатки:

$$0.02\,x_1 + 0.06\,x_2 \leq 0.05(x_1 + x_2).$$

В последних двух неравенствах переменные $x_1$ и $x_2$ надо перенести из правых частей неравенств в левые. Окончательно модель примет следующий вид:

$$\text{минимизировать } z = 0.3\, x_1 + 0.9\, x_2$$

при ограничениях

$$x_1 + x_2 \geq 800,$$

$$0.21\, x_1 - 0.30\, x_2 \leq 0,$$

$$0.03\, x_1 - 0.01\, x_2 \geq 0,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

На рис. 2.3 показано графическое решение этой задачи. В отличие от модели примера 1, здесь две прямые, соответствующие неравенствам ограничений, проходят через начальную точку (0, 0). Для того чтобы провести на графике такую прямую, необходима еще одна точка. Координаты этой точки можно найти, подставив в уравнение прямой любое значение для одной переменной и затем из этого уравнения найти значение для другой. Например, для второго неравенства из системы ограничений положим $x_1 = 200$, тогда для второй переменной получаем уравнение $0.21 \times 200 - 0.30\, x_2 = 0$; отсюда имеем $x_2 = 140$. Таким образом, прямая

$$0.21\, x_1 - 0.30\, x_2 = 0,$$

проходит через точки (0, 0) и (200, 140). Заметим также, в данном случае для определения допустимого полупространства нельзя использовать в качестве "тестовой" точку (0, 0), здесь следует взять какую-либо другую, например (100, 0) или (0, 100).

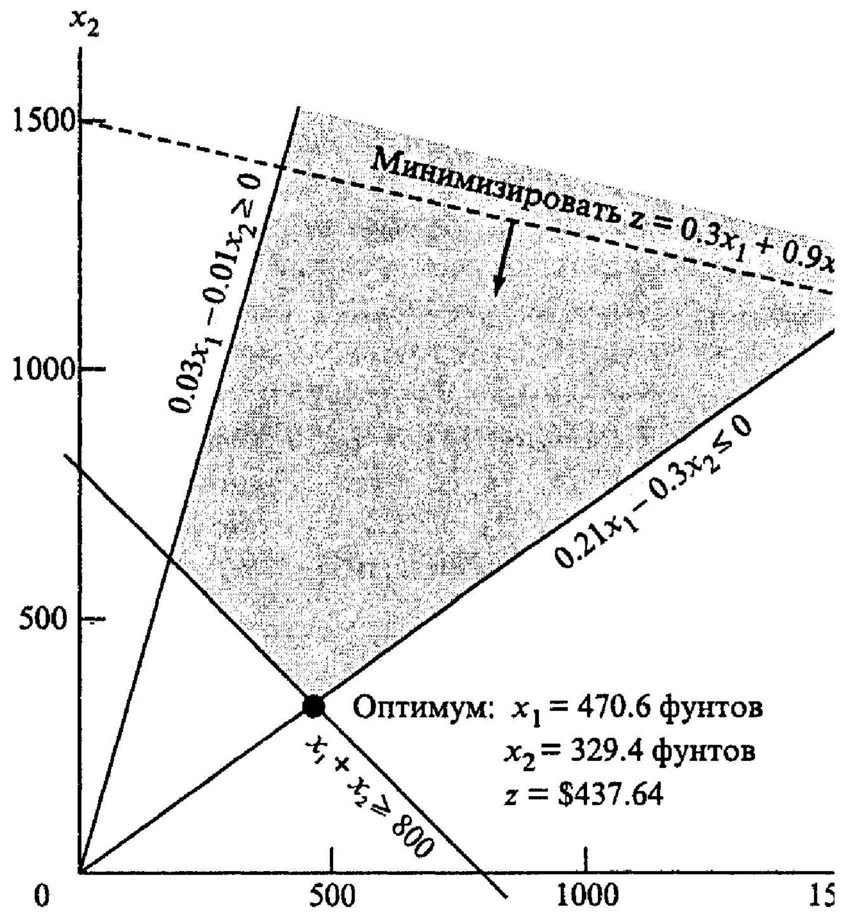
$x_2$
1500
1000
500
0
500
1000
15
Минимизировать $z = 0.3x_1 + 0.9x$
$0.03x_1 - 0.01x_2 \geq 0$
$0.21x_1 - 0.3x_2 \leq 0$
$x_1 + x_2 \geq 800$
Оптимум: $x_1 = 470.6$ фунтов
$x_2 = 329.4$ фунтов
$z = \$437.64$

*Рис. 2.3*

Поскольку в данной модели следует минимизировать целевую функцию, поэтому нужно идти в направлении уменьшения ее значений (это направление на рис. 2.3 показано стрелкой). Оптимальное решение находится на пересечении прямых $x_1 + x_2 = 800$ и $0.21\ x_1 - 0.30\ x_2 = 0$, откуда получаем $x_1 = 470.59$ (фунтов) и $x_2 = 329.41$ (фунтов). При этих значениях переменных минимальная стоимость производимой ежедневно пищевой добавки составляет $z = 0.3 \times 470.59 + 0.9 \times 329.41 = \$\ 437.65$.

**Расчетное задание**: тепловая электростанция для генерации электрического тока использует уголь. Агентство по защите окружающей среды установило следующие ограничения: концентрация сернистого газа не должна превышать $К_{сг}$ количество выбрасываемых аэрозольных частиц не должно превышать $Н_{ач}$ граммов в час. Тепловая электростанция использует пылевидный уголь двух сортов, С1 и С2. Перед сжиганием эти сорта угля обычно смешиваются. Для простоты предполагается, что сернистая составляющая в смеси углей определяется как средневзвешенное от доли угля каждого сорта в смеси.

Найти оптимальную смесь углей обоих сортов, обеспечивающую максимальное количество генерируемой энергии в час.

Характеристики используемых сортов угля для каждого варианта задания приведены в таблице 3.

Таблица 3

| варианты заданий | сорт угля | концентрация серы при сжигании тонны угля в час | количество выбрасываемых аэрозольных частиц (грамм/час) | концентрация сернистого газа при сжигании тонны смеси угля в час ($К_{сг}$) | количество выбрасываемых аэрозольных частиц при сжигании смеси угля (грамм/час) ($Н_{ач}$) | генерируемая мощность (кВт) при сжигании тонны угля в час |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | С1 | 0,035 | 9 | 0,033 | 10 | 9000 |
| | С2 | 0,030 | 12 | | | 12000 |
| 2 | С1 | 0,045 | 9 | 0,05 | 10 | 9000 |
| | С2 | 0,055 | 10 | | | 12000 |
| 3 | С1 | 0,045 | 11 | 0,05 | 10 | 9000 |
| | С2 | 0,055 | 9 | | | 12000 |
| 4 | С1 | 0,045 | 20 | 0,05 | 15 | 9000 |
| | С2 | 0,055 | 9 | | | 12000 |
| 5 | С1 | 0,055 | 20 | 0,05 | 10 | 9000 |
| | С2 | 0,045 | 9 | | | 12000 |
| 6 | С1 | 0,055 | 16 | 0,05 | 10 | 12000 |
| | С2 | 0,045 | 9 | | | 9000 |
| 7 | С1 | 0,055 | 15 | 0,05 | 10 | 9000 |
| | С2 | 0,045 | 8 | | | 12000 |
| 8 | С1 | 0,08 | 15 | 0,085 | 10 | 12000 |
| | С2 | 0,09 | 7 | | | 9000 |
| 9 | С1 | 0,04 | 9 | 0,04 | 10 | 12000 |
| | С2 | 0,03 | 8 | | | 9000 |
| 10 | С1 | 0,028 | 15 | 0,03 | 10 | 12000 |
| | С2 | 0,035 | 8 | | | 9000 |